Como vimos la clase pasada trabajar con los conceptos básicos de probabilidad para resolver problemas reales podría ser poco práctico

Ω para algunos experimentos aleatorios puede ser cualquier cosa: letras, atributos, números u objetos de todo tipo.

→ Se desarrolla el concepto de v.a.

$$(\Omega, P) \xrightarrow{X} (V, P_X), \text{ con } V \subset \mathbb{R}$$

En donde $P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \in A\})$

pre-imagen de $A \subset V$

Para resolver problemas aplicados, en general nos concentramos en (V, P_X) y nos olvidamos de (Ω, P). Entonces, de manera informal

X describirá los resultados de un experimento "numérico" que tiene un componente aleatorio

De manera muy general podemos decir que existen dos tipos de v.a.

Discretas. V - es un conjunto numerable en $\mathbb{R}$

Continuas. V - es un intervalo en $\mathbb{R}$.

Vamos con las v.a. X discretas, $V = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$

$$\Rightarrow \quad f(x_j) = P(X = x_j), \quad j = 1, \dots, k$$

función de distribución de probabilidades: nos da información acerca de los valores que toma X y la probabilidad con la que X toma estos valores.

A continuación veremos la función de distribución acumulada de probabilidades

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j),$$

que como veremos más adelante nos da la oportunidad de calcular la probabilidad de que X tome valores en un cierto conjunto A, i.e. $P_X(A)$

Formalmente

La función de distribución de probabilidad de una v.a. discreta X y $V = \{x_1, x_2, \dots\}$ cumple con las siguientes propiedades

1: $f(x_j) \geq 0, \ \forall x_j \in V$

2: $\sum_{j \geq 1} f(x_j) = 1$

3: $P_X(A) = \sum_{x_j \in A} f(x_j)$, para $A \subset V$, y cuando

A está constituido por sólo un elemento x_j

$$P_X(A) = P(X = x_j) = f(x_j).$$

Estas 3 propiedades de la función de distribución de probabilidad son completamente análogas a los 3 axiomas que debe cumplir una probabilidad (en el caso de probabilidad básica)

La función de distribución de probabilidad para una v.a. X continua sobre un intervalo V debe cumplir que

1: $f(x) \geq 0$, $\forall x \in V$

2: $\int_V f(x)dx = 1$

3: $P_X(A) = \int_A f(x)\,dx$, para $A \subset V$.

Adicionalmente f debe tener como máximo un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito.

En el caso de

X v.a. discreta f - función de masa de probabilidad

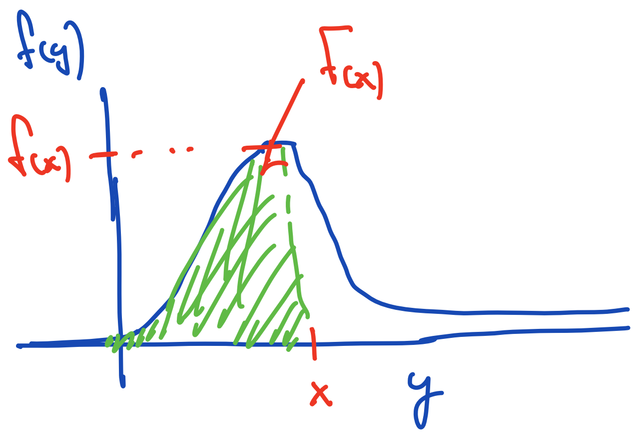
X v.a. continua f - función de densidad de probabilidad nosotros simplemente le llamaremos f la función de distribución de probabilidad. Mientras que a F(x) le llamaremos la función de distribución acumulada.

En el caso discreto

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x)$$

En el caso continuo

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$



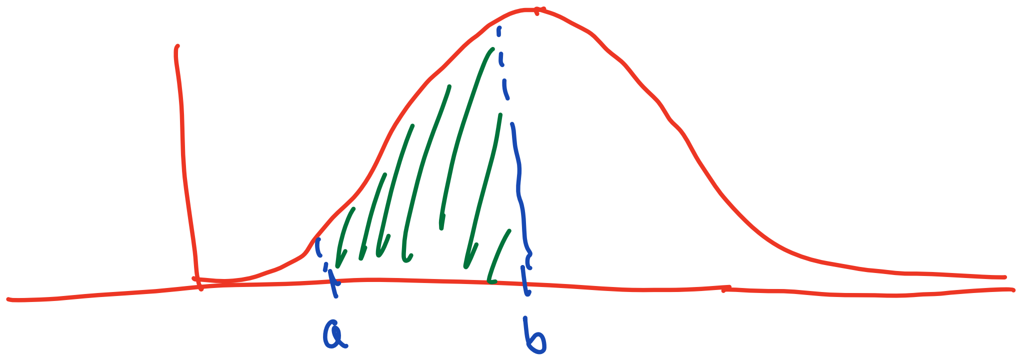
$\Rightarrow$ por el teorema fundamental del cálculo

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$P_X([a,b]) = P_X(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$$

$$= F(b) - F(a)$$



Importante: $P_X(\{a\}) = P_X(X = a)$

$$= \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Entonces en el caso de v.a. continuas

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b)$$
$$= P(a < X \le b)$$
$$= P(a \le X \le b)$$

Pero en el caso de v.a. discretas

$$P(a < X \le b) = \sum_{x \le b} f(x) - \sum_{x \le a} f(x)$$
$$= F(b) - F(a)$$

pero $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + f(a)$

$\Rightarrow$ X v.a. que será nuestro modelo para describir fenomenos aleatorios

- $f(x)$ distribución de probabilidad, nos dará información acerca del comportamiento agregado de X.

- $F(x)$ distribución de probabilidad acumulada nos ayudará a calcular probabilidades, i.e.

$$P_X(A) = P_X(X \in A)$$

¿Qué nos interesa saber de X?

$\mathbb{E}(X)$ $\leftarrow$ el valor esperado de la v.a.

$Var(X)$ $\leftarrow$ varianza

$\mathbb{E}(X^k)$ $\leftarrow$ k-esimo momento.

Vamos a ver un ejemplo.

Tenemos el siguiente juego de azar. Se tienen 9 pelotitas en una urna: 5 rojas, 3 azules y 1 verde. El jugador saca una pelota de forma aleatoria y recibe

100 pesos por sacar la roja
400 pesos por sacar la azul
1200 pesos por sacar la verde

Cada intento cuesta 400 pesos. ¿Es buena idea jugar para ganar dinero? Vamos a considerar nuestra v.a. y su $f(x)$

$$V = \{100,\ 400,\ 1{,}000\}$$

x	$f(x)$
100	$5/9$
400	$3/9$
1,000	$1/9$

Si jugamos n-veces, aproximadamente nuestra ganancia sería

$$G_n = n\,100\,\tfrac{5}{9} + n\,400\,\tfrac{3}{9} + n\,1{,}000\,\tfrac{1}{9}$$

$$= n\,100\left(\frac{5}{9} + \frac{12}{9} + \frac{10}{9}\right)$$

$$= 300n$$

Pero si jugamos n-veces $\Rightarrow$ gastamos $400n$

$$\Rightarrow \quad G_n - P_n = 300n - 400n = \underline{\underline{-100n}}$$

no nos conviene jugar este juego!

Hay que obtener una cara

$$\text{Ganancia promedio} = \frac{G_n}{n} = \underline{\underline{300}}$$

$$= 100 \cdot \tfrac{5}{9} + 400 \cdot \tfrac{3}{9} + 1{,}000 \cdot \tfrac{1}{9}$$

$$x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3)$$

Así, formalmente definimos el valor esperado de la v.a. X como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j \geq 1} x_j f(x_j) \quad \cdot \text{ v.a. discreta}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \quad \cdot \text{ v.a. continua}$$